

Lösungen zu den Aufgaben zum Buch

Homberger, Preissler, Bauer: Operations Research und Künstliche Intelligenz



Kapitel 1, Abschnitt 1.4, S. 25ff:**Aufgabe 1.1**

Welche Situation kann bei einem restringierten Optimierungsproblem vorkommen?

- ☐ FALSCH: Die Zielfunktion besteht aus Nebenbedingungen.
- ☐ RICHTIG: Die Variablen müssen gegebene Nebenbedingungen erfüllen.
- ☐ FALSCH: Die Nebenbedingungen sind bei Anwendung einer Heuristik nicht relevant.

Aufgabe 1.2

Welche Aussage(n) kann man über eine Lösung eines Optimierungsproblems treffen?

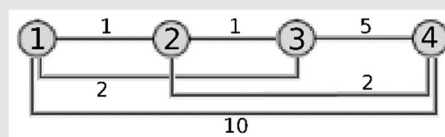
- ☐ FALSCH: Eine Lösung ist bei restringierten Optimierungsproblemen auch immer gleichzeitig eine zulässige Lösung. (Eine Lösung, wie sie im Buch definiert wurde, ist lediglich ein Vektor von Werten der Entscheidungsvariablen.)
- ☐ FALSCH: Mit einer Lösung ist immer eine optimale Lösung gemeint.
- ☐ FALSCH: Eine Lösung kann nur durch exakte mathematische Optimierungsverfahren gefunden werden.

Aufgabe 1.3

Welche Aussagen treffen auf eine Heuristik zu?

- ☐ RICHTIG: Eine Heuristik ist ein relativ schnelles Verfahren, das bei einem Optimierungsproblem eine gute, tolerierbare zulässige Lösung finden soll.
- ☐ FALSCH: Eine Heuristik kann nur beim Rucksack-Problem angewendet werden.
- ☐ RICHTIG: Eine zulässige Lösung, die durch eine Heuristik gefunden wurde, kann die schlechteste Lösung des Optimierungsproblems sein.

Ein Beispiel zur dritten Antwortmöglichkeit ist eine Nearest-Neighbor-Heuristik bei einem symmetrischen (d.h. richtungsunabhängigen) Rundreiseproblem mit vier Standorten 1 bis 4 mit Depot bei 1. Die Instanz ist gegeben durch den folgenden bewerteten Graphen. Die Angaben bei den Kanten sind die Distanzen zwischen den Standorten.



Die Nearest-Neighbor-Heuristik liefert als Lösung die Tour 1-2-3-4-1 mit dem Wert (Gesamtdistanz) 17. Dies ist die schlechteste Lösung des Problems, da die anderen Lösungen alle kleinere Werte besitzen: Die Rundreise 1-3-2-4-1 hat den Wert 15, die Rundreise 1-2-4-3-1 den Wert 10.

Aufgabe 1.4 bleibt dem Leser bzw. der Leserin überlassen.

Aufgabe 1.5

Die Daten der Problem Instanz eines Rucksack-Problems lassen sich in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

	Stickoxid-Ausstoß	Nutzlast
F_1	0,8	1500
F_2	0,5	900
F_3	0,1	500
F_4	0,6	800
Obere Grenze	1,1	

Als Entscheidungsvariablen werden die vier binären Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 gewählt, wobei

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn das Fahrzeug } F_k \text{ ausgewählt wird,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad k \in \{1, \dots, 4\}.$$

Das Optimierungsproblem lautet:

$$1500x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 800x_4 \rightarrow \max$$

Gleichbedeutend dazu ist:

$$-1500x_1 - 900x_2 - 500x_3 - 800x_4 \rightarrow \min$$

Die Restriktionen lauten:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,1x_3 + 0,6x_4 \leq 1,1$$

$$x_1 \in \{0,1\}, \dots, x_4 \in \{0,1\}$$

Vollständige Enumeration: Nachfolgend werden alle $2^4 = 16$ Lösungen aufgelistet.

F_1	F_2	F_3	F_4	Stickoxid-Ausstoß	Zulässige Lösung?	Nutzlast
0	0	0	0	0	ja	0
1	0	0	0	0,8	ja	1500
0	1	0	0	0,5	ja	900
0	0	1	0	0,1	ja	500
0	0	0	1	0,6	ja	800
1	1	0	0	1,3	nein	2400
1	0	1	0	0,9	ja	2000
1	0	0	1	1,4	nein	2300
0	1	1	0	0,6	ja	1400
0	1	0	1	1,1	ja	1700

F_1	F_2	F_3	F_4	Stickoxid-Ausstoß	Zulässige Lösung?	Nutzlast
0	0	1	1	0,7	ja	1300
1	1	1	0	1,4	nein	2900
1	1	0	1	1,9	nein	3200
1	0	1	1	1,5	nein	2800
0	1	1	1	1,2	nein	2200
1	1	1	1	2,0	nein	3700

Aus der Tabelle liest man ab, dass der Einsatz von Fahrzeug F_1 und Fahrzeug F_3 optimal ist mit der Nutzlast 2000 kg.

Heuristik: Man bildet die Quotienten „Nutzen/Gewicht“, um eine Priorisierung bei der Wahl der Lösungen zu erhalten. Je größer der Quotient, umso eher wird die zugehörige Lösung für die Lösung gewählt.

Fahrzeuge	Quotient	Priorisierung
F_1	$\frac{1500}{0,8} = 1875$	2
F_2	$\frac{900}{0,5} = 1800$	3
F_3	$\frac{500}{0,1} = 5000$	1
F_4	$\frac{800}{0,6} \approx 1333,33$	4

Für die Lösung der Heuristik wird zuerst F_3 gewählt wegen Priorität 1, danach Fahrzeug F_1 , da es als zweites priorisiert wurde, usw., bis die Nebenbedingung verletzt wird. Es kommen aufgrund der Priorisierung nur die folgenden vier Lösungen in Frage

F_1	F_2	F_3	F_4	Stickoxid-Ausstoß	Zulässige Lösung?	Nutzlast
0	0	1	0	0,8	ja	1300
1	0	1	0	0,9	ja	2000
1	1	1	0	1,4	nein	2900
1	1	1	1	2,0	nein	3700

Man erkennt, dass in diesem Beispiel die durch die Heuristik ermittelte zulässige Lösung mit der größten Nutzlast gleich der optimalen Lösung ist, welche durch vollständige Enumeration ermittelt wurde.

Aufgabe 1.6

Die Entscheidungsvariablen sind x_1, x_2, x_3 , wobei x_1 die Energiemenge von Strom aus Wasserkraft, x_2 die Energiemenge von Strom aus Photovoltaikanlagen und x_3 die Energiemenge von Strom aus Biogasanlagen bedeuten [GWh], die verkauft werden. Da nur ein Anteil im Tarif aus regenerativen Quellen bestehen soll, gibt es eine weitere Variable x_4 , welche die Menge von Strom [GWh] aus nichtregenerativen Quellen darstellt.

Die Zielfunktion lautet:

$$9x_1 + 7x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

Gleichbedeutend dazu ist:

$$-9x_1 - 7x_2 - 6x_3 \rightarrow \min$$

In der Zielfunktion taucht x_4 nicht auf, da nur der Gewinn der regenerativen Energiequellen zu betrachten ist. Die Restriktionen lauten:

Für die Gesamtmenge:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 400$$

Für den Anteil aus regionalen Quellen:

$$0,2x_1 + 0,35x_2 + 0,45x_3 \geq 0,2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

oder umgeformt

$$-0,15x_2 - 0,25x_3 + 0,2x_4 \leq 0$$

Für den Anteil aus landesweiten Quellen:

$$0,18x_1 + 0,25x_2 + 0,1x_3 \geq 0,05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

oder umgeformt

$$-0,13x_1 - 0,2x_2 - 0,05x_3 + 0,05x_4 \leq 0$$

sowie

$$0,18x_1 + 0,25x_2 + 0,1x_3 \leq 0,18(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

oder umgeformt

$$0,07x_2 - 0,08x_3 - 0,18x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \geq 110$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Zusammengefasst hat man also:

$$-9x_1 - 7x_2 - 6x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 400$$

$$-0,15x_2 - 0,25x_3 + 0,2x_4 \leq 0$$

$$-0,13x_1 - 0,2x_2 - 0,05x_3 + 0,05x_4 \leq 0$$

$$0,07x_2 - 0,08x_3 - 0,18x_4 \leq 0$$

$$x_1 \leq 200$$

$$-x_2 \leq -110$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

(Zur Information: Die optimale Lösung ist $x_1^* = 193,75$, $x_2^* = 110$, $x_3^* = 96,25$, $x_4^* = 0$ mit dem Wert $z^* = -3091,25$. Der optimale Gewinn aus regenerativen Energiequellen beträgt also $v^* = 3091,25$ GE. Man erkennt, dass in der optimalen Situation der Tarif nur aus regenerativen Energiequellen zusammengesetzt ist.)

Aufgabe 1.7

Die Entscheidungsvariablen sind x_1, x_2, x_3 , wobei x_1 die Anzahl der Schiffe von Typ S_1 , x_2 die Anzahl der Schiffe von Typ S_2 und x_3 die Anzahl der Schiffe vom Typ S_3 bezeichnet.

Das Optimierungsproblem lautet:

$$32000x_1 + 21000x_2 + 27000x_3 \rightarrow \min$$

$$140x_1 + 190x_2 + 130x_3 = 1000$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_3 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

oder

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0, x_3 \in \mathbb{N}_0$$

Die Nebenbedingung „Pro transportiertem Container nimmt das Unternehmen 300 GE ein.“ bleibt im Modell unberücksichtigt (eine Auswahl der Daten ist notwendig); da alle Container transportiert werden müssen, sind die Einnahmen konstant und spielen für die Optimierung keine Rolle (Zur Information: Die optimale Lösung lautet im Fall des nicht ganzzahligen Problems $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* \approx 4,4615$ mit dem Wert $z^* \approx -216461,5$.)

Kapitel 2, Abschnitt 2.10, S. 65ff:

Aufgabe 2.1

Welche Lösungssituationen können bei einem linearen Optimierungsproblem vorkommen?

- ☐ RICHTIG: Wenn zwei verschiedene optimale Lösungen existieren, so existieren sogar unendlich viele.
- ☐ RICHTIG: Ist die zulässige Menge eines linearen Optimierungsproblems nichtleer und beschränkt, so existiert eine optimale Lösung.
- ☐ FALSCH: Die Summe (Vektoraddition) zweier zulässiger Lösungen ist wieder eine zulässige Lösung.

Aufgabe 2.2

Welche Bedingungen sind hinreichend für unendlich viele optimale Lösungen bei einem Minimierungsproblem mit zwei Variablen?

- ☐ FALSCH: Die Steigung der Isozielwertgeraden ist gleich der Steigung einer begrenzenden Geraden g der zulässigen Menge.
- ☐ FALSCH: Die zulässige Menge ist unbeschränkt.
- ☐ RICHTIG: Die Steigung der Isozielwertgeraden ist gleich der Steigung einer begrenzenden Geraden g der zulässigen Menge und der Zielfunktionswert auf dem zulässigen Teil von g ist minimal.

Aufgabe 2.3

Beim Pivotschritt wird das Tableau transformiert durch:

- ☐ FALSCH: Die Pivotzeile wird durch das negative Pivotelement dividiert.
- ☐ FALSCH: Die zweite Kopfzeile wird ausschließlich mit der Rechteckregel transformiert.
- ☐ RICHTIG: Ist in einer Zeile eine Null in der Pivotspalte, so bleibt die Zeile unter der Transformation unverändert.

Aufgabe 2.4

Wie erkennt man im Tableau des Simplex-Algorithmus, dass unendlich viele optimale Lösungen existieren?

- ☐ FALSCH: In der zweiten Kopfspalte tauchen mindestens zwei gleiche Werte auf.
- ☐ FALSCH: In der zweiten Kopfzeile taucht mindestens eine Null auf. (Das Optimierungsproblem braucht z.B. nicht lösbar zu sein oder die zugehörige Variable ist eine gesperrte Variable.)
- ☐ FALSCH: Eine Zeile der Matrix A besteht aus lauter Nullen.

Aufgabe 2.5

Wenn das primale Problem (P) eine zulässige Lösung besitzt, dann kann das duale Problem (D)...

- ☐ RICHTIG: keine zulässige Lösung besitzen, da die zulässige Menge leer ist. (Wenn (P) zwar zulässige Lösungen besitzt und die Zielfunktion darauf unbeschränkt ist, dann hat (D) keine zulässigen Lösungen, und dies ist gleichbedeutend damit, dass die zulässige Menge leer ist.)
- ☐ FALSCH: keine zulässige Lösung besitzen, da die Zielfunktion auf der zulässigen Menge unbeschränkt ist. (Zulässige Lösungen haben nichts mit der Zielfunktion zu tun. Zulässige Lösungen können existieren, egal, ob die Zielfunktion beschränkt oder unbeschränkt auf der zulässigen Menge ist.)
- ☐ RICHTIG: keine der beiden vorigen Aussagen erfüllen. (D.h. das duale Problem besitzt auch eine zulässige Lösung. Dann besitzen (P) und (D) optimale Lösungen.)

Aufgabe 2.6

Was unterscheidet den dualen Simplex-Algorithmus vom klassischen Simplex-Algorithmus?

- ☐ RICHTIG: Die Voraussetzungen bei den rechten Seiten und den Zielfunktionskoeffizienten sind verschieden.
- ☐ FALSCH: Die Rechteckregeln sind verschieden.
- ☐ RICHTIG: Die Auswahlreihenfolge bei Wahl der Pivotzeile und -spalte ist jeweils verschieden.
- ☐ RICHTIG: Beim klassischen Simplex-Algorithmus wird in jedem Pivotschritt ein primal zulässiges Tableau transformiert mit dem Ziel, ein dual zulässiges, d.h. optimales, Tableau zu erhalten. Beim dualen Simplex-Algorithmus wird in jedem Pivotschritt ein dual zulässiges Tableau umgeformt mit dem Ziel, ein primal zulässiges Tableau zu erhalten.

Aufgabe 2.7

Für optimale Lösungen eines ganzzahligen linearen Optimierungsproblems (Minimierungsproblem) gilt:

- ☐ FALSCH: Es gibt nur höchstens endlich viele ganzzahlige optimale Lösungen. (Bei unbeschränkter zulässiger Menge kann es unendlich viele ganzzahlige optimale Lösungen geben.)
- ☐ RICHTIG: Der Zielfunktionswert der optimalen ganzzahligen Lösung ist eine obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts der zugehörigen Relaxation.
- ☐ FALSCH: Eine ganzzahlige optimale Lösung erhält man, wenn eine optimale Lösung der zugehörigen Relaxation in ihren Koordinaten abgerundet wird. (Es gibt Beispiele, bei denen dies nicht der Fall ist.)

Aufgabe 2.8

Die Entscheidungsvariablen sind: x_M Anbaufläche [ha] für Mais, x_R Anbaufläche [ha] für Rüben, x_W Anbaufläche [ha] für Weizen. Einige Daten in der Aufgabe können in einer Tabelle übersichtlich dargestellt werden:

	x_M	x_R	x_W	Obere Schranke
Fläche	1	1	1	60
Arbeitstage	6	8	12	400
Anbaukosten	40	20	60	4000
Gewinn	70	80	120	

Die Zielfunktion für den Gewinn lautet $v = 70x_M + 80x_R + 120x_W$. Sie soll maximiert werden:

$$70x_M + 80x_R + 120x_W \rightarrow \max$$

Gleichbedeutend dazu ist: $-70x_M - 80x_R - 120x_W \rightarrow \min$

Die Angaben aus der Tabelle umgesetzt ergeben die Restriktionen:

$$x_M + x_R + x_W \leq 60$$

$$6x_M + 8x_R + 12x_W \leq 400$$

$$40x_M + 20x_R + 60x_W \leq 4000$$

Dazu kommen die Bedingungen aus der Richtlinie. Die Forderung „Anbaufläche für Mais höchstens doppelt so groß wie die Anbaufläche für Rüben“ ist in Formeln umgesetzt durch

$$x_M \leq 2x_R \Leftrightarrow x_M - 2x_R \leq 0$$

Die Bedingung „Anbaufläche für Weizen mindestens 10% der Gesamtanbaufläche“ lautet als Ungleichung

$$x_W \geq 0,1 \cdot (x_M + x_R + x_W) \Leftrightarrow 0,1x_M + 0,1x_R - 0,9x_W \leq 0$$

Dazu kommen die Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_M \geq 0, x_R \geq 0, x_W \geq 0$$

Zusammengefasst lautet die gesuchte Modellinstanz in Normalform

$$-70x_M - 80x_R - 120x_W \rightarrow \min$$

$$x_M + x_R + x_W \leq 60$$

$$6x_M + 8x_R + 12x_W \leq 400$$

$$40x_M + 20x_R + 60x_W \leq 4000$$

$$x_M - 2x_R \leq 0$$

$$0,1x_M + 0,1x_R - 0,9x_W \leq 0$$

$$x_M \geq 0, x_R \geq 0, x_W \geq 0$$

(Zur Information: Die optimale Lösung lautet $x^* = \begin{pmatrix} x_M^* \\ x_R^* \\ x_W^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 33,333 \\ 16,667 \\ 5,556 \end{pmatrix}$ mit dem maximalen Gewinn $v^* \approx 4333,333$.)

Aufgabe 2.9

Die angegebene zulässige Menge M wird begrenzt durch sechs Geradenstücke. Die Geraden sind:

1. Die Gerade mit Steigung $-\frac{1}{2}$ durch den Punkt $(8|0)$ mit der Gleichung $x_1 + 2x_2 = 8$. Die zugehörige Halbebene wird durch die Ungleichung $x_1 + 2x_2 \geq 8$ gegeben.
2. Die x_1 -Achse. Die Halbebene wird durch $x_2 \geq 0$ beschrieben.
3. Die vertikale Gerade durch $(11|0)$ mit der Gleichung $x_1 = 11$. Die Halbebene lautet $x_1 \leq 11$.
4. Die Gerade mit Steigung $-\frac{1}{2}$ durch den Punkt $(16|0)$ mit der Gleichung $x_1 + 2x_2 = 16$. Die zugehörige Halbebene wird durch die Ungleichung $x_1 + 2x_2 \leq 16$ gegeben.
5. Die Gerade mit Steigung $\frac{1}{3}$ durch den Punkt $(0|6)$ mit der Gleichung $-x_1 + 3x_2 = 18$. Die Ungleichung der zugehörige Halbebene ist $-x_1 + 3x_2 \leq 18$.
6. Die x_2 -Achse. Die Halbebene wird durch $x_1 \geq 0$ beschrieben.

Damit ergibt sich das lineare Optimierungsproblem

$$x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$$

mit den Restriktionen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_1 &\leq 11 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Eine Lösung ohne Anwendung des Simplex-Algorithmus ist die graphische Lösungsmethode. Die Isozielwertgeraden des Optimierungsproblems haben die Steigung $\frac{1}{4}$. Diese von unten parallel an M herangeschoben ergibt den Schnittpunkt $(11|0)$. Der Zielfunktionswert an diesem Punkt ist $z = 11$. Wird eine Isozielwertgerade mit Steigung $\frac{1}{4}$ von oben an M herangeschoben, so ergibt sich der Schnittpunkt, der entsteht, wenn die Randgeraden mit den Gleichungen

$x_1 + 2x_2 = 16$, $-x_1 + 3x_2 = 18$ geschnitten werden.

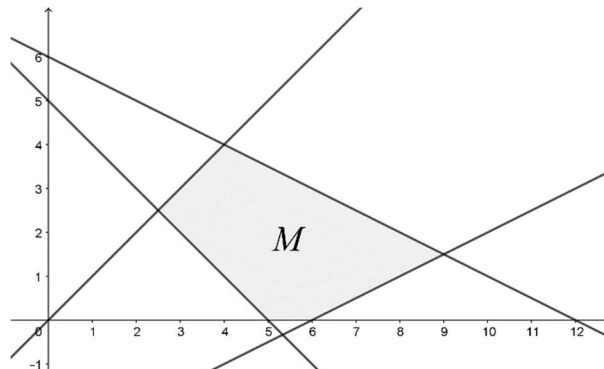
Löst man das lineare Gleichungssystem $x_1 + 2x_2 = 16$, $-x_1 + 3x_2 = 18$, so erhält man die Lösung $x = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 6,8 \end{pmatrix}$ mit dem Zielfunktionswert $z = -24,8$. Da ein Minimierungsproblem vorliegt, erhält man aus dem Vergleich der beiden Zielfunktionswerte den optimalen Wert $z^* = -24,8 (< 11)$ und $x^* = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 6,8 \end{pmatrix}$ ist die optimale Lösung.

Aufgabe 2.10

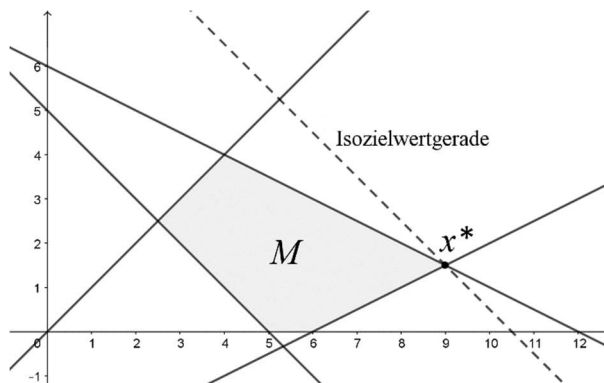
Erratum: Leider ist in der Aufgabe im Buch ein Tippfehler enthalten: Bei $x_1 + x_2 \leq 0$ fehlt bei x_1 ein Minuszeichen. Wenn man die im Buch angegebene Nebenbedingung lässt, widerspricht sie der Restriktion $x_1 + x_2 \geq 5$, und die zulässige Menge ist leer. Somit hat dieses lineare Optimierungsproblem keine Lösung.

Gemeint war statt $x_1 + x_2 \leq 0$ die Ungleichung $-x_1 + x_2 \leq 0$. Dann lautet die Lösung wie folgt:

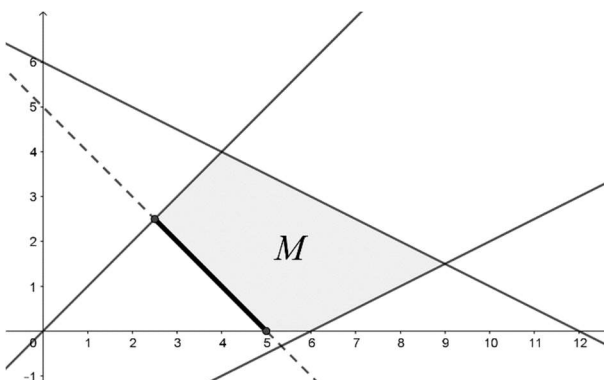
Zuerst zeichnet man die zulässige Menge in der x_1x_2 -Ebene. Dazu zeichnet man die Geraden $x_1 + x_2 = 5$, $-x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 12$, $x_1 - 2x_2 = 6$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und bestimmt jeweils aufgrund des Ungleichungszeichens die zugehörigen Halbebenen. Die zulässige Menge M ist der Schnitt der Halbebenen und in nachfolgender Abbildung angegeben.



Die Isozielwertgeraden der Zielfunktion haben die Steigung -1 . Von oben an die zulässige Menge parallel herangeschoben schneiden die Isozielwertgeraden zum ersten Mal die zulässige Menge im Schnittpunkt, der aus dem Schnitt der beiden Randgeraden mit den Gleichungen $x_1 + 2x_2 = 12$, $x_1 - 2x_2 = 6$ entsteht. Löst man das lineare Gleichungssystem, so ergibt sich die Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ mit dem Zielfunktionswert $z = -10,5$. Schiebt man die Isozielwertgeraden von unten an M , so ergeben sich unendlich viele Schnittpunkte, die durch $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0,1]$ beschrieben werden können. Der Zielfunktionswert ist für alle diese x gleich $z = -5$. Da $-10,5 < -5$ ist, ist $x = x^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ die optimale Lösung mit dem Wert $z^* = -10,5$.



Liegt ein Maximierungsproblem mit $-x_1 - x_2 \rightarrow \max$ vor, so erhält man die unendlich vielen optimalen Lösungen $x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0,1]$ mit dem Wert $z^* = -5$. In der folgenden Abbildung ist die Menge der optimalen Lösungen fett markiert.



Aufgabe 2.11

Wir verwenden für die Anwendung des klassischen Simplex-Algorithmus verkürzte Tableaus.

a)

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 21, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Das Starttableau Nr. 0 ist ein primal zulässiges Tableau mit der zulässigen Basislösung $(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = (0, 0, 20, 21)^T$. Die zugehörige Startecke ist $(x_1 | x_2) = (0 | 0)$. Die Pivotspalte ist die rechte Spalte mit dem Wert -2 in der zweiten Kopfzeile. Zur Bestimmung des Pivotelements berechnet man $\frac{20}{5} = 4$ und $\frac{21}{2} > 4$. Das Minimum ist 4; daher ist die Zeile von y_1 die Pivotzeile. Das Pivotelement ist somit 5. Durch Transformationen (insbes. mit der Rechteckregel) ergibt sich Tableau Nr. 1 mit der zugehörigen Basislösung $(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = (0, 4, 0, 13)^T$ und der Ecke $(x_1 | x_2) = (0 | 4)$. Es ist noch nicht optimal, da in der Spalte von x_1 in der zweiten Kopfzeile $-\frac{3}{5} < 0$ vorkommt.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-2
y_1	20	1	5
y_2	21	3	2

Tab.-Nr. 1		x_1	y_1
$-z$	8	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_2	13	$\frac{13}{5}$	$-\frac{2}{5}$

Tab.-Nr. 2		y_2	y_1
$-z$	11	$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{13}$
x_2	3	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$
x_1	5	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$

Im Tableau Nr. 1 zeichnet man die Spalte von x_1 als Pivotspalte aus. Man berechnet anschließend die Quotienten $4 : \frac{1}{5} = 20$ und $13 : \frac{13}{5} = 5$. Das Minimum ist 5. Deshalb ist die letzte Zeile die Pivotzeile und das Pivotelement ist $\frac{13}{5}$. Nach Transformation des Tableaus Nr. 1 erhält man das Tableau Nr. 2 mit der Basislösung $(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = (5, 3, 0, 0)^T$. Es ist optimal (dual zulässig), da die Einträge in der zweiten Kopfzeile alle ≥ 0 sind. Die optimale Lösung lautet $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem optimalen Zielfunktionswert $z^* = -11$ für das Minimierungsproblem, d.h. die optimale Ecke ist $(x_1^* | x_2^*) = (5 | 3)$ mit dem Wert $v^* = +11$ für das Maximierungsproblem.

b)

$$-x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 - 3x_2 \geq -9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Das Starttableau ist ein primal zulässiges Tableau mit der zulässigen Basislösung $(0, 0, 6, 9)^T$. Die Startecke lautet $(0 | 0)$. Die Pivotspalte ist die rechte Spalte mit dem Wert -2 in der zweiten Kopfzeile. Zur Bestimmung des Pivotelements berechnet man $\frac{6}{3} = 2$ und $\frac{9}{3} = 3$. Das Minimum ist 2; daher ist die Zeile von y_1 die Pivotzeile. Das Pivotelement ist somit 3. Durch Transformationen ergibt sich Tableau Nr. 1 mit der zulässigen Basislösung $(0, 2, 0, 3)^T$. Die Ecke, zu der man von $(0 | 0)$ gelaufen ist, ist also $(0 | 2)$. Das Tableau ist noch nicht optimal, da in der Spalte von x_1 in der zweiten Kopfzeile $-\frac{7}{3} < 0$ vorkommt.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-2
y_1	6	-2	3
y_2	9	-1	3

Tab.-Nr. 1		x_1	y_1
$-z$	4	$-\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_2	3	1	-1

Tab.-Nr. 2		y_2	y_1
$-z$	11	$\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{3}$
x_2	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	3	1	-1

Im Tableau Nr. 1 zeichnet man die Spalte von x_1 als Pivotspalte aus. Als Pivotzeile kommt nur die letzte Zeile in Frage und das Pivotelement ist 1. Nach Transformation des Tableaus Nr. 1 erkennt man, dass das Tableau Nr. 2 noch nicht optimal ist wegen $-\frac{5}{3} < 0$. Die Pivotspalte ist die rechte Spalte. Da die Einträge in der Pivotspalte alle negativ sind,

kann eine Pivotzeile nicht angegeben werden. Es gibt keine optimale Lösung des Optimierungsproblems, da die Zielfunktion auf der zulässigen Menge nach unten unbeschränkt ist.

c)

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Im primal zulässigen Starttableau liegt duale Entartung vor, da in der zweiten Kopfzeile zweimal -1 vorkommt. Als Pivotspalte wird die Spalte von x_2 gewählt. Die zulässige Basislösung lautet $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)^T = (0, 0, 3, 5, 2)^T$. Die zugehörige Startecke ist $(0|0|0)$. Zur Bestimmung des Pivotelements berechnet man $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}$ und $\frac{2}{1} = 2$. Das Minimum ist $\frac{5}{4}$; daher ist die Zeile von y_2 die Pivotzeile und das Pivotelement ist 4. Durch Transformation des Tableaus Nr. 0 ergibt sich Tableau Nr. 1 mit der zulässigen Basislösung $(0, \frac{5}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^T$. Die aktuelle Ecke lautet $(0|\frac{5}{4}|0)$. Das Tableau ist noch nicht optimal, da in der Spalte von x_3 in der zweiten Kopfzeile eine negative Zahl, $-\frac{1}{2}$, vorkommt.

Tab.-Nr. 0	x_1	x_2	x_3
$-z$	0	0	-1
y_1	3	1	2
y_2	5	1	4
y_3	2	3	1

Tab.-Nr. 1	x_1	y_2	x_3
$-z$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
y_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
y_3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

Tab.-Nr. 2	x_1	y_2	y_3
$-z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$
y_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{2}{3}$

Im Tableau Nr. 1 wird nun die Spalte von x_3 die Pivotspalte. Man berechnet anschließend die Quotienten $\frac{5}{4} : \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ und $\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Das Minimum ist $\frac{1}{2}$. Deshalb ist die Zeile von y_3 die Pivotzeile und das Pivotelement ist $\frac{3}{2}$. Nach Transformation des Tableaus Nr. 1 erhält man das Tableau Nr. 2 mit der Basislösung $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)^T = (0, 1, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$. Es ist optimal (dual zulässig), da die Einträge in der zweiten Kopfzeile alle ≥ 0 sind. Die optimale

Lösung lautet daher $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ mit dem optimalen Zielfunktionswert $z^* = -\frac{3}{2}$ für das

Minimierungsproblem, d.h. die optimale Ecke ist $(x_1^*|x_2^*|x_3^*) = (0|1|\frac{1}{2})$ mit dem Wert $v^* = \frac{3}{2}$ für das Maximierungsproblem.

Als **alternative Lösung** hätte man auch im ersten Schritt die Spalte mit x_3 in der zweiten Kopfzeile nehmen können. Man erhält in diesem Fall die Tableaus

Tab.-Nr. 0	x_1	x_2	x_3
$-z$	0	0	-1
y_1	3	1	2
y_2	5	1	4
y_3	2	3	2

Tab.-Nr. 1	x_1	x_2	y_3
$-z$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y_1	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y_2	3	-2	3
x_3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tab.-Nr. 2	x_1	y_2	y_3
$-z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$
y_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{2}{3}$

Gegenüber der ersten Lösung wird bei der alternativen Lösung der Weg von $(0|0|0)$ über die Ecke $(0|0|1)$ zur optimalen Ecke $(0|1|\frac{1}{2})$ genommen. Die zulässige Basislösung zur Ecke $(0|0|1)$ lautet $(0, 0, 1, 2, 3, 0)^T$.

Aufgabe 2.12

a)

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	2	-3
y_1	4	-1	-4
y_2	1	3	0

Hier sind keine weiteren Iterationen möglich, da in diesem primal zulässigen Tableau in der Spalte von x_2 mit $-3 < 0$ weiter unten keine positive Zahl zu finden ist. Es liegt keine optimale Lösung vor (d.h. Fall (b)), da die Zielfunktion auf der zulässigen Menge nach unten unbeschränkt ist.

b)

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-2	5
y_1	-3	2	-1
y_2	5	-2	3

Das Tableau ist nicht primal zulässig, da in der zweiten Kopfspalte $-3 < 0$ vorkommt. Es ist eine Iteration in Phase 1 durchzuführen. Die Zeile mit y_1 ist die Pivotzeile. Die Zahl $-1 < 0$ ist das Pivotelement und die Spalte mit x_2 ist Pivotspalte.

 c) y_1 ist eine gesperrte Schlupfvariable:

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	3	1
y_1	-1	-1	0
y_2	2	1	3

Es ist eine Iteration in Phase 0 durchzuführen. Die gesperrte Schlupfvariable muss in eine NBV transformiert werden. Dies gelingt auch, da in der Zeile von y_1 die Zahl $-1 \neq 0$ vorkommt. -1 wird als Pivotelement gesetzt und daher ist die Spalte von x_1 Pivotspalte.

Aufgabe 2.13

Wir lösen zuerst das Optimierungsproblem aus **Aufgabe 2.12c)**, das bereits in einem Starttableau formuliert ist.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	3	1
y_1	-1	-1	0
y_2	2	1	3

Da y_1 eine gesperrte Schlupfvariable ist, wird zuerst die Phase 0 des erweiterten Simplex-Algorithmus ausgeführt. y_1 wird zur NBV transformiert. Aus Aufgabe 2.12c) ist das Pivotelement bereits bekannt. Das Tableau Nr. 1 lautet

Tab.-Nr. 1		y_1	x_2
$-z$	-3	3	1
x_1	1	-1	0
y_2	1	1	3

Nach Phase 0 ist das Tableau Nr. 1 bereits optimal, so dass eine Phase 1 oder 2 nicht gestartet werden muss. Man liest die optimale Lösung und den optimalen Wert ab: $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z^* = 3$.

Das Optimierungsproblem von **Aufgabe 2.9** lautet

$$\begin{aligned}
 x_1 - 4x_2 &\rightarrow \min \\
 x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\
 x_1 &\leq 11 \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\
 -x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\
 x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Der erweiterte Simplex-Algorithmus wird mit **Phase 1** begonnen, da das Starttableau nicht primal zulässig ist. Die Pivotzeile im Starttableau Nr. 0 ist die Zeile mit y_1 , da in der zweiten Kopfspalte die negative Zahl -8 steht. Als Pivotelement können beide negativen Zahlen in der Pivotzeile, sowohl -1 als auch -2 , gewählt werden. Wir wählen als Pivotelement die Zahl -1 . Nach Transformation des Tableaus Nr. 0 ergibt sich Tableau Nr. 1.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	1	-4
y_1	-8	-1	-2
y_2	11	1	0
y_3	16	1	2
y_4	18	-1	3

Tab.-Nr. 1		y_1	x_2
$-z$	-8	1	-6
x_1	8	-1	2
y_2	3	1	-2
y_3	8	1	0
y_4	26	-1	5

Tab.-Nr. 2		y_1	x_1
$-z$	16	-2	3
x_2	4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	11	0	1
y_3	8	1	0
y_4	6	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$

Die Phase 1 wird beendet, da Tableau 1 nun primal zulässig ist (alle Zahlen in der zweiten Kopfspalte sind nichtnegativ). Die aktuelle Ecke ist $(8|0)$ und die zulässige Basislösung ist $(8,0,0,3,8,26)^T$. Um Tableau Nr. 2 zu erhalten, wird **Phase 2**, der klassische Simplex-Algorithmus, angewendet. Pivotspalte ist die rechte Spalte, da sich in der zweiten Kopfzeile die negative Zahl -6 befindet. Wegen $\frac{8}{2} = 4 < \frac{26}{5}$ ist die Zeile von x_1 Pivotzeile und das Pivotelement ist 2. Nach Transformation von Tableau Nr. 1 entsteht das Tableau Nr. 2. Die aktuelle Ecke von Tableau Nr. 2 ist $(0|4)$ und die zulässige Basislösung ist $(0,4,0,11,8,6)^T$. Die Spalte von y_1 ist Pivotspalte wegen $-2 < 0$. Die

zu bildenden Quotienten sind $\frac{8}{1}$ und $6:\frac{3}{2} = 4$. Da $4 < 8$ ist, ist die Zeile von y_4 Pivotzeile. Pivotelement ist $\frac{3}{2}$. Nach Transformation von Tableau Nr. 2 erhält man Tableau Nr. 3, das noch nicht optimal ist. Die Ecke bei Tableau Nr. 3 ist $(0|6)$ und die Basislösung lautet $(0,6,4,11,4,0)^T$. Als Pivotelement in Tableau Nr. 3 ergibt sich $\frac{5}{3}$. Nach der Transformation von Tableau Nr. 3 erhält man abschließend das optimale Tableau Nr. 4.

Tab.-Nr. 3		y_4	x_1
$-z$	24	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	6	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_2	11	0	1
y_3	4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
y_1	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Tab.-Nr. 4		y_4	y_3
$-z$	$\frac{124}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	$\frac{34}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_2	$\frac{43}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$
x_1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
y_1	8	0	1

Aus Tableau Nr. 4 liest man die optimale Lösung ab: $x^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{34}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 6,8 \end{pmatrix}$ mit dem optimalen Wert $z^* = -\frac{124}{5} = -24,8$.

Aufgabe 2.14

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem (P)

$$-4x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

mit den Restriktionen

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\ -2x_1 + x_2 &\geq -7 \\ 2x_2 - x_3 &\leq 6 \\ -x_1 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

und der Nichtnegativitätsbedingung

$$x_1 \geq 0.$$

Die Variablen x_2 und x_3 können als freie Variablen alle reellen Werte annehmen.

Die Ungleichung $-2x_1 + x_2 \geq -7$ schreiben wir um in eine Ungleichung mit dem \leq -Zeichen: $2x_1 - x_2 \leq 7$. Für das duale Problem (D) wendet man die Transformationstabelle an. Aus dem Maximierungsproblem wird dual ein Minimierungsproblem. Die Anzahl der Restriktionen ergibt die Anzahl der Entscheidungsvariablen. Das duale Problem hat also vier Variablen v_1, v_2, v_3 und v_4 . Die Anzahl der Variablen im primalen Problem ist die Anzahl der Restriktionen im dualen Problem. Wir haben somit drei Restriktionen für (D). Die linken Seiten der \leq -Restriktionen

und der Gleichungsrestriktion bilden die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die transponierte Matrix lautet

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Die Nichtnegativitätsbedingung für x_1 in (P) wird zum \geq -Zeichen in der ersten

Restriktion von (D). Die freien Variablen x_2 und x_3 in (P) werden in zwei Gleichungen für die zweite und dritte Restriktion in (D) umgesetzt. Die drei \leq -Restriktionen in (P) erzeugen drei Nichtnegativitätsbedingungen für v_1, v_2, v_3 in (D). Die Gleichungsrestriktion in (P) führt zur freien Variablen v_4 in (D). Mit den genannten Transformationen lässt sich nun das duale Optimierungsproblem (D) von (P) aufstellen:

$$\begin{aligned} 5v_1 - 7v_2 + 6v_3 + 4v_4 &\rightarrow \min \\ v_1 + 2v_2 - v_4 &\geq -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3v_1 - v_2 + 2v_3 &= 1 \\ -v_3 - v_4 &= -2 \\ v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, \end{aligned}$$

wobei v_4 alle reellen Werte annehmen kann.

Aufgabe 2.15

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} -4x_1 - 7x_2 - 5x_3 &\rightarrow \max \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ -3x_1 - 2x_2 &\leq -7 \\ 2x_1 + x_3 &\geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Das Starttableau ist dual zulässig, aber nicht primal zulässig, deshalb ist der duale Simplex-Algorithmus besonders geeignet zum Auffinden der optimalen Lösung. Beim dualen Simplex-Algorithmus wählt man zuerst die Pivotzeile über eine minimale negative Zahl in der zweiten Kopfspalte. Hier ist dies -7 . Daher ist die Zeile mit y_2 die Pivotzeile. Die Quotienten zur Auswahl der Pivotspalte werden nun mit der zweiten Kopfzeile gebildet. Hier betrachtet man $\frac{4}{-3}$ und $\frac{7}{-2}$ und wählt den maximalen Quotienten. Dieser ist $-\frac{4}{3}$. Somit ist die Spalte von x_1 die Pivotspalte und das Pivotelement ist -3 . Die Transformation von Tableau Nr. 0 liefert Tableau Nr. 1, das immer noch primal nicht zulässig ist. Es wird eine zweite Iteration notwendig.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2	x_3
$-z$	0	4	7	5
y_1	-5	-2	1	-3
y_2	-7	-3	-2	0
y_3	-6	-2	0	-1

Tab.-Nr. 1		y_2	x_2	x_3
$-z$	$-\frac{28}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$	5
y_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	-3
x_1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
y_3	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1

Tab.-Nr. 2		y_3	x_2	x_3
$-z$	-12	2	7	3
y_1	1	-1	1	-2
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y_2	2	$-\frac{3}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$

Die Pivotzeile in Tableau Nr. 1 wird die Zeile von y_3 , da $-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3}$. Die Quotienten lauten $\frac{4}{3}$; $(-\frac{2}{3})$ und $\frac{5}{-1}$. Die maximale Zahl der beiden Zahlen ist -2 . Die Pivotspalte ist die Spalte von y_2 und das Pivotelement lautet $-\frac{2}{3}$. Anschließend Transformation liefert das Tableau Nr. 2, das nun dual zulässig ist. Da die Transformationen der Tableaus so eingerichtet waren, dass primal zulässige Tableaus primal zulässig bleiben, ist das Tableau Nr. 2 optimal.

Die optimale Lösung lautet $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem optimalen Zielfunktionswert $v^* = -z^* = -12$.

Aufgabe 2.16

a) Das lineare ganzzahlige Optimierungsproblem P_0 lautet

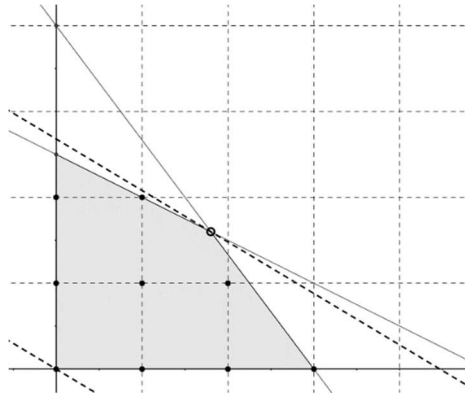
$$\begin{aligned} -3x_1 - 5x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Die zulässige Menge M ist dieselbe wie im Beispiel 2.6 im Buch und in der nachfolgenden Abbildung durch die schwarzen Punkte dargestellt.

Gelöst wird das Problem mit der Branch-and-Bound-Methode.

Als globale obere Schranke wird $O = \infty$ gesetzt. Nun wird die Relaxation P_{R0} von P_0 gelöst. Dies kann graphisch geschehen oder mittels des Simplex-Algorithmus.

Lösung von P_{R0} : Bei der graphischen Lösung benötigt man die Steigung der Isozielwertgeraden. Sie beträgt $-\frac{3}{5}$. Es werden Isozielwertgeraden an die zulässige Menge herangeschoben, bis sie die zulässige Menge zum ersten Mal schneiden. Die Schnitte sind Kandidaten für die optimale Lösung. In der folgenden Abbildung sind die Isozielwertgeraden gestrichelt gezeichnet. Der Abbildung kann man entnehmen, dass die Kandidaten die Punkte $(0 | 0)$ und $(1,8 | 1,6)$ sind. Der Zielfunktionswert bei $(0 | 0)$ lautet $z^* = 0$ und bei $(1,8 | 1,6)$ $z^* = -13,4$.



Die optimale Lösung von P_{R0} ist also $x^* = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,6 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -13,4$. Die untere Schranke wird auf $U = -13,4$ gesetzt.

Diese optimale Lösung erhalten wir auch mit dem klassischen Simplex-Algorithmus. Die Tableaus dazu sind

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-3	-5
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3

Tab.-Nr. 1		x_1	y_1
$-z$	$\frac{25}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Tab.-Nr. 2		y_2	y_1
$-z$	$\frac{67}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$
x_2	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_1	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$

Da x^* nicht ganzzahlig ist, wird P_0 verzweigt zu P_1 und P_2 , z.B. mittels der zusätzlichen Restriktionen $x_1 \leq 1$ und $x_1 \geq 2$.

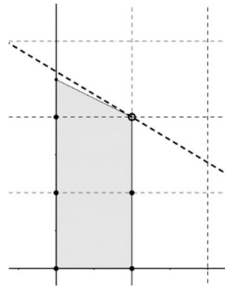
$$P_1: -3x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$P_2: -3x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 &\in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Lösung von P_{R1} : Die optimale Lösung ist die ganzzahlige Lösung $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -13$. Dies erkennt man entweder graphisch oder mit dem Simplex-Algorithmus.



Der klassische Simplex-Algorithmus liefert die folgenden Tableaus:

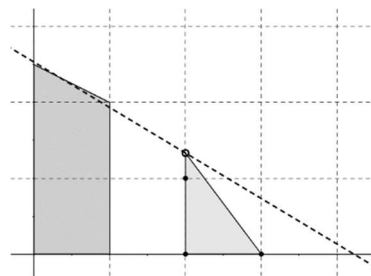
Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-3	-5
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	1	1	0

Tab.-Nr. 1		x_1	y_1
$-z$	$\frac{25}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y_3	1	1	0

Tab.-Nr. 2		y_3	y_1
$-z$	13	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_1	1	1	0

Sie ist auch eine Lösung des ganzzahligen Problems P_1 . Daher muss P_1 nicht weiter verzweigt werden, da das Abbruchkriterium [2] erfüllt ist. Die obere Schranke wird verkleinert zu $O = -13$.

Lösung von P_{R2} : Die optimale Lösung ist $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -\frac{38}{3} \approx -12,667$.



Die zugehörigen Tableaus des erweiterten Simplex-Algorithmus, beginnend mit einem Tableau der Phase 1, lauten

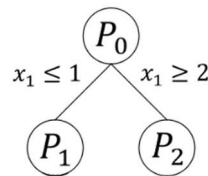
Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-3	-5
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	-2	-1	0

Tab.-Nr. 1		y_3	x_2
$-z$	6	-3	-5
y_1	3	1	2
y_2	4	4	3
x_1	2	-1	0

Tab.-Nr. 2		x_1	y_2
$-z$	$\frac{38}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{5}{3}$
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	2	-1	0

Damit erhält die untere Schranke U den Wert $U = -\frac{38}{3}$. Nun ist aber $U > O = -13$. Daher muss P_2 nicht weiter verzweigt werden, da das Abbruchkriterium [3] gilt.

Somit kann nirgendwo weiter verzweigt werden und der gesamte Baum der Branch-and-Bound-Methode ist:



Die optimale Lösung von P_0 ist die ganzzahlige Lösung $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -13$.

b) Das lineare ganzzahlige Optimierungsproblem P_0 bei b) lautet mit veränderter Zielfunktion

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\
 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
 x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

Wieder wird die Branch-and-Bound-Methode angewendet. Als globale obere Schranke wird $O = \infty$ gesetzt.

Lösung von P_{R0} : Die optimale Lösung von P_{R0} ist ebenfalls $x^* = \begin{pmatrix} 1,8 \\ 1,6 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -3,4$ mit ähnlicher graphischer Situation wie im Teil a). Die Isozielwertgeraden haben aber nun die Steigung -1 . Die untere Schranke wird auf $U = -3,4$ gesetzt. Diese optimale Lösung erhalten wir mit dem klassischen Simplex-Algorithmus. Die Tableaus werden nachfolgend aufgelistet. Wegen der dualen Entartung hat man im Starttableau eine Wahl für die Pivotspalte. Gewählt wird die Spalte von x_2 in Anlehnung an Teil a).

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-1
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3

Tab.-Nr. 1		x_1	y_1
$-z$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Tab.-Nr. 2		y_2	y_1
$-z$	$\frac{17}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_1	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$

Da x^* nicht ganzzahlig ist, wird P_0 verzweigt zu P_1 und P_2 , z.B. mittels der zusätzlichen Restriktionen $x_1 \leq 1$ und $x_1 \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 P_1: \quad x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\
 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
 x_1 &\leq 1 \\
 x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2: \quad x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\
 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
 x_1 &\geq 2 \\
 x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

Lösung von P_{R1} : Die optimale Lösung der Relaxation P_{R1} von P_1 ist die ganzzahlige Lösung $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -3$. Der zugehörige klassische Simplex-Algorithmus liefert in Abänderung von Teil a) die folgenden Tableaus:

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-1
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	1	1	0

Tab.-Nr. 1		x_1	y_1
$-z$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
y_3	1	1	0

Tab.-Nr. 2		y_3	y_1
$-z$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_1	1	1	0

Sie ist auch eine Lösung des ganzzahligen Problems P_1 . Daher muss P_1 nicht weiter verzweigt werden, da das Abbruchkriterium [2] erfüllt ist. Die obere Schranke wird von ∞ verkleinert zu $O = -3$.

Lösung von P_{R2} : Die optimale Lösung ist $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -\frac{10}{3} \approx -3,333$.

Graphisch liegt eine ähnliche Situation vor wie bei Teil a). Die zugehörigen Tableaus des erweiterten Simplex-Algorithmus, beginnend mit einem Tableau der Phase 1, lauten:

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-1
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	-2	-1	0

Tab.-Nr. 1		y_3	x_2
$-z$	2	-1	-1
y_1	3	1	2
y_2	4	4	3
x_1	2	-1	0

Tab.-Nr. 2		y_3	y_2
$-z$	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	2	-1	0

Damit erhält die untere Schranke U den Wert $U = -\frac{10}{3} < O$. Daher wird P_2 weiter verzweigt in die Probleme P_3 und P_4 , indem die nicht ganzzahlige Koordinate x_2 für die beiden neuen Ungleichungen $x_2 \leq 1$ und $x_2 \geq 2$ verwendet wird.

$$P_3: x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

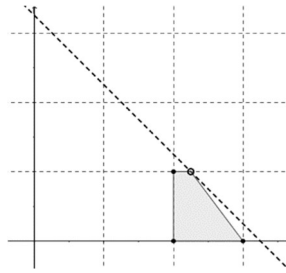
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$P_4: x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\geq 2 \\ x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Lösung von P_{R4} : Die zulässige Menge von P_4 ist die leere Menge, da nicht gleichzeitig die Restriktionen $x_1 + 2x_2 \leq 5$, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$ erfüllt sein können. Deshalb braucht P_4 wegen [1] nicht weiter verzweigt zu werden.

Lösung von P_{R3} : Die optimale Lösung der Relaxation P_{R3} ist $x^* = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -\frac{13}{4} = -3,25$.



Die zugehörigen Tableaus des erweiterten Simplex-Algorithmus, beginnend mit einem Tableau der Phase 1, lauten:

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-1
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	-2	-1	0
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 1		y_3	x_2
$-z$	2	-1	-1
y_1	3	1	2
y_2	4	4	3
x_1	2	-1	0
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 2		y_3	y_4
$-z$	3	-1	1
y_1	1	1	-2
y_2	1	4	-3
x_1	2	-1	0
x_2	1	0	1

Tab.-Nr. 3		y_2	y_4
$-z$	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$
y_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x_1	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
x_2	1	0	1

Da $U < z^* = -3,25 < 0$ wird P_3 weiter verzweigt in die Teilprobleme P_5 und P_6 durch die Ungleichungen $x_1 \leq 2, x_1 \geq 3$.

$$P_5: x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

oder

$$P_5: x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 2$$

(Die Restriktionen werden vereinfacht.)

$$x_1 = 2$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \in \{0, 1\}$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

$$P_6: x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

oder

$$P_6: x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 2$$

(Die Restriktionen werden vereinfacht.)

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \{0, 1\}$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

Lösung von P_{R5} : Die optimale Lösung der Relaxation P_{R5} ist ganzzahlig. Sie lautet $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -3$. Somit ist dieses x^* auch Lösung des ganzzahligen Problems P_5 . Daher muss P_5 nicht weiter verzweigt werden wegen

Kriterium [2]. Obwohl die optimale Lösung von P_{R5} direkt berechnet werden kann, werden nachfolgend trotzdem die Tableaus des erweiterten Simplex-Algorithmus angegeben. Die Schlupfvariable y_3 ist eine gesperrte Variable, daher startet der erweiterte Simplex-Algorithmus mit Phase 0. y_3 wird zuerst in NBV-Position gebracht. Das Pivotelement ist in der Zeile von y_3 und hat den Wert $1 (\neq 0)$. Phase 1 ist nicht notwendig, Phase 2 beginnt mit Tableau Nr. 1.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-1
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	2	1	0
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 1		y_3	x_2
$-z$	2	1	-1
y_1	3	-1	2
y_2	4	-4	3
x_1	2	1	0
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 2		y_3	y_4
$-z$	3	1	1
y_1	1	-1	-2
y_2	1	-4	-3
x_1	2	1	0
x_2	1	0	1

Der Simplex-Algorithmus endet mit dem optimalen Tableau Nr. 2, da für nicht gesperrte Variablen die Einträge in der zweiten Kopfzeile nichtnegativ sind (hier ein Eintrag 1).

Lösung von P_{R6} : Die optimale Lösung von P_{R6} ist $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -3$ und ist daher auch optimale Lösung des Optimierungsproblems P_6 . Diese Lösung erhält man schnell, wenn man die Ungleichung $4x_1 + 3x_2 \leq 12$ betrachtet. Die Ungleichung wird nur erfüllt, wenn $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$. Auch hier werden der Vollständigkeit halber die Tableaus angegeben. Der erweiterte Simplex-Algorithmus beginnt mit Phase 1, da ein Eintrag in der zweiten Kopfspalte negativ ist.

Tab.-Nr. 0		x_1	x_2
$-z$	0	-1	-1
y_1	5	1	2
y_2	12	4	3
y_3	-3	-1	0
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 1		y_3	x_2
$-z$	3	-1	-1
y_1	2	1	2
y_2	0	4	3
x_1	3	-1	0
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 2		y_2	x_2
$-z$	3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y_1	2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
y_3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_1	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
y_4	1	0	1

Tab.-Nr. 3		y_2	y_3
$-z$	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_1	2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	3	0	-1
y_4	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$

P_6 muss nicht weiter verzweigt werden wegen [2]. Damit ist das Verzweungsverfahren beendet. Das zuletzt erhaltene x^* ist wie die beiden anderen ganzzahligen optimalen Lösungen Kandidat für die optimale Lösung des ganzzahligen Optimierungsproblems P_0 .

Alle im Verfahren erhaltenen ganzzahligen Lösungen werden nun durch Betrachten des zugehörigen Zielfunktionswerts miteinander verglichen. Die Lösungen mit $-z = x_1 + x_2 = \max$ sind die optimalen Lösungen von P_0 . Die Lösungen sind

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit dem Wert } z^* = -3, x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit dem Wert } z^* = -3, x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit dem Wert } z^* = -3.$$

Da alle Werte gleich -3 sind, erhält man drei verschiedene optimale Lösungen von P_0 . Die Lösungsmenge ist $L^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, der optimale Wert ist für das Maximierungsproblem $v^* = -z^* = 3$.

Aufgabe 2.17

Das aus Aufgabe 2.9 abgeleitete ganzzahlige Optimierungsproblem P_0 lautet

$$x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$$

mit den Restriktionen

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

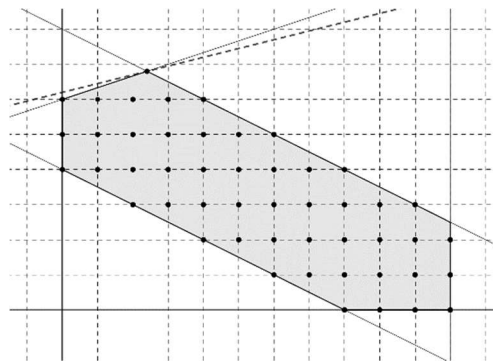
$$x_1 \leq 11$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

Nachfolgend sind die zulässigen Mengen von P_0 und P_{R0} und gestrichelt die Isozielwertgerade durch die optimale Lösung der Relaxation P_{R0} dargestellt.



Lösung von P_{R0} : Die optimale Lösung der Relaxation P_{R0} von P_0 entnimmt man aus Aufgabe 2.9: $x^* = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 6,8 \end{pmatrix}$ mit $z^* = -24,8$. Nun wird die Branch-and-Bound-Methode angewendet. Die obere Schranke ist $O = \infty$, die untere Schranke $U = -24,8$. Da x^* nicht ganzzahlig ist, wird P_0 z.B. verzweigt durch Hinzunahme der Ungleichungen $x_2 \leq 6, x_2 \geq 7$.

Es entstehen die zwei Optimierungsprobleme P_1 und P_2 :

$$P_1: x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 \leq 11$$

$$x_2 \geq 7$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

$$P_2: x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 \leq 11$$

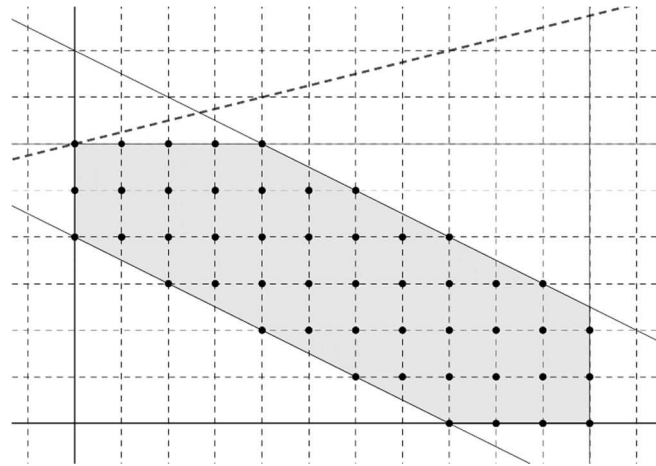
$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

Lösung von P_{R1} : Die zulässige Menge von P_{R1} und P_1 ist die leere Menge. Deshalb wird P_1 nicht weiter verzweigt wegen Kriterium [1].

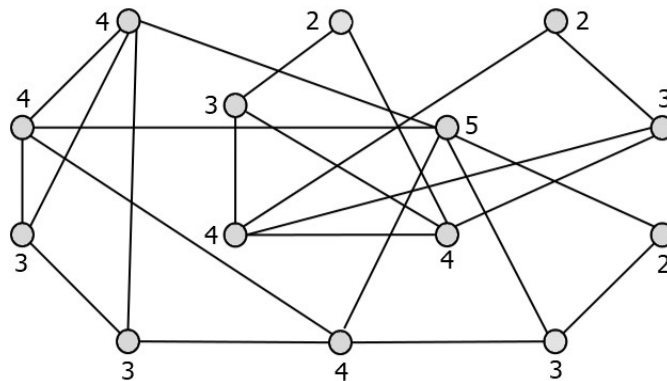


Lösung von P_{R2} : Die optimale Lösung von P_{R2} ist die ganzzahlige Lösung $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit dem Zielfunktionswert $z^* = -24$. Deshalb wird mit Abbruchkriterium [2] auch P_2 nicht weiter verzweigt. Damit bricht das Branch-and-Bound-Verfahren ab. Somit ist die optimale Lösung von P_0 $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit dem Wert $z^* = -24$.

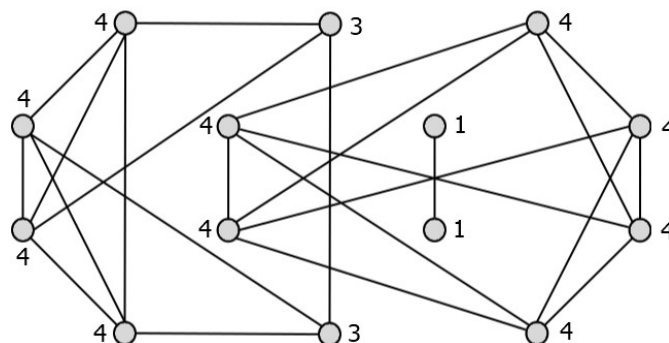
Kapitel 3, Abschnitt 3.4, S. 87f:

Aufgabe 3.1

- a) Ordnung = Anzahl der Knoten = 14
 Größe = Anzahl der Kanten = 23
 Knotengrade:



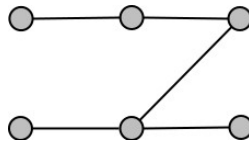
- b) Ordnung = Anzahl der Knoten = 14
 Größe = Anzahl der Kanten = 24
 Knotengrade:



Aufgabe 3.2 (Handschlag-Lemma)

Gesucht ist ein ungerichteter Graph mit 6 Knoten mit den jeweils angegebenen Knotengraden, wobei zwei Knoten durch maximal eine Kante verbunden sein sollen und keine Kanten von einem Knoten zu sich selbst existieren.

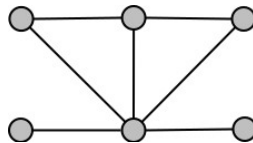
- a) 1; 2; 3; 2; 1; 1



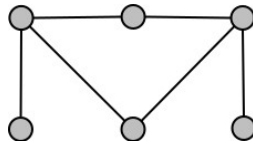
- b) 1; 3; 3; 4; 5; 5

Die Summe der Knotengrade berechnet sich zu $1+3+3+4+5+5 = 21$. Diese müsste nach dem Handschlag-Lemma mit der doppelten Kantenanzahl im Graphen übereinstimmen, d.h. gerade sein. Deshalb existiert kein Graph mit den angegebenen Knotengraden.

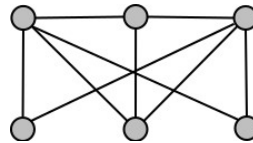
- c) 1; 1; 2; 2; 3; 5



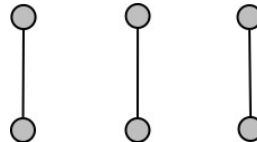
- d) 1; 2; 3; 3; 1; 2



- e) 3; 2; 4; 4; 2; 3



- f) 1; 1; 1; 1; 1; 1



Aufgabe 3.3 (Spezielle Graphen)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ FALSCH: Der vollständige Graph K_n ist für kein n bipartit.
Für $n = 2$ ist der vollständige Graph bipartit.
- ☐ FALSCH: Der Kreis-Graph C_n ist für kein n bipartit.
Der Kreis-Graph C_n ist für jedes gerade n bipartit.
- ☐ RICHTIG: Der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$ ist für jedes n regulär.
Im vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$ hat jeder Knoten Knotengrad n , ist also n -regulär.

Aufgabe 3.4 (Bäume)

Woran erkennt man, ob ein Graph ein Baum ist?

- ☐ FALSCH: Wenn alle Knoten einen Knotengrad von 1 haben, so ist der Graph ein Baum.
Der Graph in Aufgabe 3.2 f) zeigt ein Beispiel, bei dem jeder Knoten Grad 1 hat, aber kein Baum vorliegt.
- ☐ FALSCH: Falls der Graph azyklisch ist, so liegt ein Baum vor.
Siehe den Graphen aus Aufgabe 3.2 f)

- ☐ FALSCH: Wenn der Graph keine Knoten mit Knotengrad 1 enthält, so liegt kein Baum vor. Der Graph mit einem Knoten und keinen Kanten stellt einen Baum dar, hat aber keinen Knoten mit Knotengrad 1.

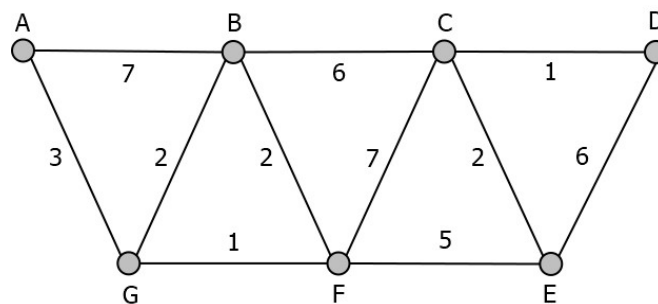
Aufgabe 3.5 (Minimale Spannbäume)

Was unterscheidet den Algorithmus von Prim vom Algorithmus von Kruskal?

- ☐ FALSCH: Nur der Algorithmus von Kruskal liefert garantiert einen minimalen Spannbaum.
- ☐ RICHTIG: Der Algorithmus von Prim liefert nach jedem Iterationsschritt einen Teilgraphen, der ein Baum ist.
- ☐ FALSCH: Nur der Algorithmus von Kruskal benötigt höchstens so viele Schritte, wie der Graph Knoten enthält.

Aufgabe 3.6 (Minimale Spannbäume)

Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum mit dem Algorithmus von Prim und dem Algorithmus von Kruskal für den folgenden Graphen.



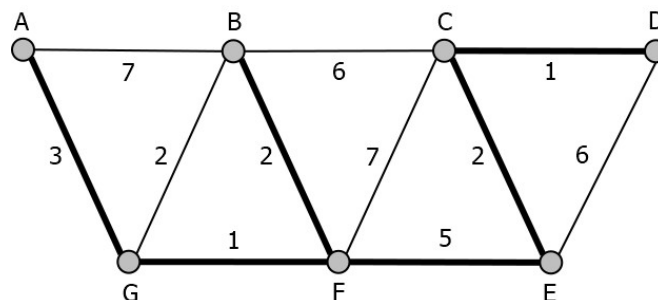
Gehen wir z.B. vom Knoten A als Startknoten aus, so fügt der Algorithmus von Prim sukzessive folgende Kanten dem Teilbaum hinzu:

$$[A, G], [G, F], [F, B], [F, E], [E, C], [C, D]$$

mit den Gesamtkosten

$$3 + 1 + 2 + 5 + 2 + 1 = 14.$$

Als Lösung erhält man folgenden minimalen Spannbaum:



Alternativ kann man die Kante $[F, B]$ auch durch $[G, B]$ ersetzen.

Für den Algorithmus von Kruskal werden die Kanten aufsteigend nach den Kantengewichten angeordnet.

$$w(e) = 1: [C, D], [F, G]$$

$$w(e) = 2: [B, G], [B, F], [C, E]$$

$$w(e) = 3: [A, G]$$

$$w(e) = 5: [E, F]$$

$$w(e) = 6: [B, C], [D, E]$$

$$w(e) = 7: [A, B], [C, F]$$

Der Algorithmus von Kruskal wählt nun sukzessive folgende Kanten für den minimalen Spannbaum aus:

$$[C, D], [F, G], [B, G], [C, E], [A, G], [E, F].$$

Alternativ kann man hier die Kante $[B, G]$ durch $[B, F]$ ersetzen.

Kapitel 4, Abschnitt 4.7, S. 125ff:

Aufgabe 4.1 (Rundreiseproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.3.

Die Matrix $X = [[0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [2, 0, 0, 0]]$ beschreibt eine Tour.

☐ FALSCH: Da $[2, 0, 0, 0]$ keine Kante auswählt.

Aufgabe 4.2 (Rundreiseproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.3.

Die Matrix $X = [[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]]$ beschreibt eine Tour.

☐ FALSCH: Da zwei Teiltouren $(1,3), (3,1)$ bzw. $(2,4), (4,2)$ vorliegen und keine zusammenhängende Tour.

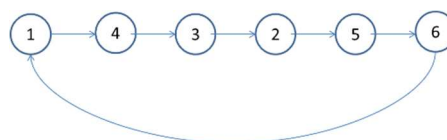
Aufgabe 4.3 (Rundreiseproblem)

Gegeben sei eine Instanz mit $n = 6$ Standorten.

Die Matrix $X = [[0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0]]$ beschreibt eine Tour.

☐ FALSCH: Da Ort 6 nicht verlassen wird.

Aufgabe 4.4 (Rundreiseproblem)



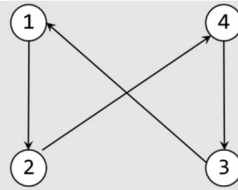
Die räumliche Anordnung der Knoten kann beliebig gewählt werden.

Aufgabe 4.5 (Rundreiseproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.3.

Die Matrix $X = [[0, 0, 1, 0], [1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0]]$ beschreibt die dargestellte Tour.

☐ FALSCH: Da z.B. von Knoten 1 zu Knoten 3 gereist wird, und nicht wie in der dargestellten Tour von Knoten 1 zu Knoten 2.



Aufgabe 4.6 (Rundreiseproblem)

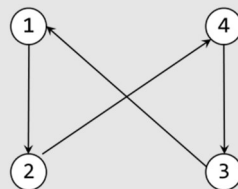
Der Lösungsraum einer Instanz mit $n = 5$ Standorten besteht aus 120 Touren.

☐ FALSCH: Es sind $(5-1)! = 4! = 24$ Touren.

Aufgabe 4.7 (Rundreiseproblem)

Gegeben seien die Parameterwerte: $S = \{1, \dots, 4\}$ und

$D = (d_{i,j}) = [[0, 6, 1, 2], [7, 0, 3, 6], [3, 2, 0, 5], [8, 2, 2, 0]]$. Die nachfolgende Tour hat eine Gesamtdistanz von $z = 13$ Entfernungseinheiten.



☐ FALSCH: $z = 6 + 6 + 2 + 3 = 17$

Aufgabe 4.8 (Nearest-Neighbor-Heuristik)

Es gibt zwei Lösungen, da für die Distanzen gilt: $d_{1,2} = d_{1,3}$.

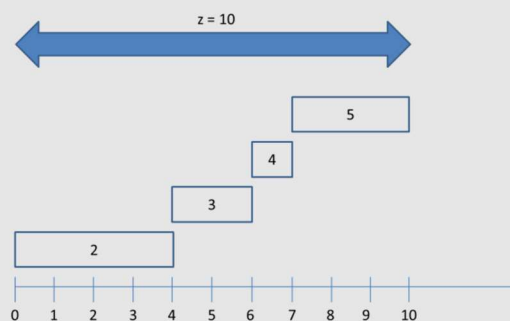
Tour: (4, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4) oder

Tour: (4, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 4)

Aufgabe 4.9 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.9. Der Vektor $x = (0, 0, 4, 6, 7, 10)^T$ beschreibt einen Schedule mit einer Projektdauer von 10 Perioden.

☐ RICHTIG:



Aufgabe 4.10 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.9. Der Vektor $x = (0, 0, 3, 4, 0, 5)^T$ beschreibt einen Schedule.

- ☐ FALSCH: Job 4 beginnt zum Zeitpunkt 4, aber Job 3 ist erst zum Zeitpunkt $3+2=5$ beendet.

Aufgabe 4.11 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben seien die Instanz und der Schedule aus Abb. 4.9. Es gilt für die Auslastung von Ressourcentyp $r = 1$: $y_1(4) = 3$.

- ☐ FALSCH: $y_1(4) = 2$

Aufgabe 4.12 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.9. Die direkten Nachfolger von Job 2 sind $N_2 = \{4, 6\}$.

- ☐ FALSCH: $N_2 = \{4\}$

Aufgabe 4.13 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.9. Die direkten Nachfolger von Job 3 sind $N_3 = \{4, 5\}$.

- ☐ RICHTIG

Aufgabe 4.14 (Projekt-Scheduling-Problem)

Die Startzeit und die Fertigstellungszeit von Dummy-Job n sind identisch.

- ☐ RICHTIG

Aufgabe 4.15 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.9. Der Job 4 hat eine Dauer von $d_4 = 3$ Perioden.

- ☐ FALSCH: $d_4 = 1$

Aufgabe 4.16 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben seien die Instanz und der Schedule aus Abb. 4.9. Der Job 4 startet zu der Zeit $x_4 = 5$.

- ☐ RICHTIG

Aufgabe 4.17 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben seien die Instanz und der Schedule aus Abb. 4.9. Der Job 3 benötigt zu der Zeit $t = 2$ Ressourcen vom Typ $r = 1$.

- ☐ FALSCH: Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist Job 3 bereits abgeschlossen.

Aufgabe 4.18 (Projekt-Scheduling-Problem)

Gegeben sei folgende Instanz: $i \in J = \{1, \dots, 10\}$, $r \in R = \{1\}$, $v_1 = 4$, $(d_i) = (0, 3, 2, 5, 2, 4, 4, 1, 5, 0)^T$, $(b_{i,r}) = (0, 3, 4, 1, 3, 2, 3, 2, 2, 0)$, $K = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 8), (4, 9), (7, 10), (8, 10), (9, 10)\}$.

Der Schedule $x = (x_i) = (0, 0, 5, 0, 3, 7, 12, 11, 7, 16)^T$ ist optimal.

- ☐ RICHTIG

Aufgabe 4.21 (Standortproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.14.

Die Transportkosten $t_{1,2}$ von Standort Nachfrager 2 nach Standort 1 betragen 4 Geldeinheiten.

- ☐ FALSCH: $t_{12} = 8$.

Aufgabe 4.22 (Standortproblem)

Gegeben seien die Instanz aus Abb. 4.14 und der Standortplan (x, Y) , $x = (1, 1, 0)^T$, $Y = [[1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 0]]$. Die Gesamtkosten z des Standortplanes betragen 23 Geldeinheiten.

- ☐ RICHTIG

Aufgabe 4.23 (Standortproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.14. Das folgende Tupel (x, Y) , $x = (1, 1, 0)^T$, $Y = [[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]]$, stellt einen Standortplan dar.

- ☐ FALSCH: Standort 3 wurde nicht ausgewählt. Deshalb darf auch keine Zuordnung von Nachfragern zum Standort 3 erfolgen.

Aufgabe 4.24 (Standortproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.14. Das folgende Tupel (x, Y) , $x = (1, 1, 1)^T$, $Y = [[1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 0]]$, stellt einen Standortplan dar.

- ☐ RICHTIG

Aufgabe 4.25 (Standortproblem)

Gegeben sei die Instanz aus Abb. 4.14. Das folgende Tupel (x, Y) , $x = (1, 1, 0)^T$, $Y = [[1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 0]]$, stellt einen Standortplan dar.

☐ FALSCH: Nachfrager 4 ist keinem Standort zugeordnet.

Aufgabe 4.26 (Standortproblem)

Für eine Instanz mit $n = 4$ Standorten und $m = 5$ Nachfragern können 15 verschiedene Auswahl-Vektoren berechnet werden.

☐ RICHTIG

Aufgabe 4.27 (Standortproblem)

Für eine Instanz mit $n = 4$ Standorten und $m = 5$ Nachfrager können 1024 verschiedene Zuordnungs-Matrizen berechnet werden.

☐ RICHTIG

Aufgabe 4.28 (Standortproblem)

$L = \{l_1, \dots, l_6\}$ mit

$$l_1 = (x, Y), x = (1, 0)^T, Y = [[1, 1], [0, 0]]$$

$$l_2 = (x, Y), x = (1, 1)^T, Y = [[1, 1], [0, 0]]$$

$$l_3 = (x, Y), x = (0, 1)^T, Y = [[0, 0], [1, 1]]$$

$$l_4 = (x, Y), x = (1, 1)^T, Y = [[0, 0], [1, 1]]$$

$$l_5 = (x, Y), x = (1, 1)^T, Y = [[1, 0], [0, 1]]$$

$$l_6 = (x, Y), x = (1, 1)^T, Y = [[0, 1], [1, 0]]$$

Aufgabe 4.29 (Losgrößenproblem)

Gegeben seien die Instanz aus Abb. 4.15 sowie folgendes Tupel (X, Y, B, W) :

$$X = [[13, 0, 0], [13, 0, 0], [7, 6, 0], [26, 0, 0]],$$

$$Y = [[1, 0, 0], [1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 0, 0]],$$

$$B = [[5, 1, 7], [13, 0, 0], [7, 6, 0], [20, 6, 0]],$$

$$W = [[8, 7, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [26, 0, 0]].$$

Das Tupel beschreibt einen Losgrößenplan.

☐ FALSCH

Aufgabe 4.30 (Losgrößenproblem)

Gegeben seien die Instanz aus Abb. 4.15 sowie folgendes Tupel (X, Y, B, W) :

$X = [[6, 0, 7], [13, 0, 0], [6, 7, 0], [26, 0, 0]]$,

$Y = [[1, 0, 1], [1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 0, 1]]$,

$B = [[5, 1, 7], [6, 0, 7], [6, 0, 7], [19, 7, 0]]$,

$W = [[1, 0, 0], [7, 7, 0], [0, 7, 0], [7, 0, 0]]$.

Das Tupel beschreibt einen Losgrößenplan.

☐ RICHTIG

Aufgabe 4.31 (Losgrößenproblem)

Gegeben seien die Instanz aus Abb. 4.15 sowie folgendes Tupel (X, Y, B, W) :

$X = [[5, 1, 7], [13, 0, 0], [5, 1, 7], [18, 8, 0]]$,

$Y = [[1, 1, 1], [1, 0, 0], [1, 1, 1], [1, 1, 0]]$,

$B = [[5, 1, 7], [5, 1, 7], [5, 1, 7], [18, 1, 7]]$,

$W = [[0, 0, 0], [8, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 7, 0]]$.

Das Tupel beschreibt einen Losgrößenplan.

☐ FALSCH

Kapitel 6, Abschnitt 6.10, S. 183ff:**Aufgabe 6.1 (Dekodierung Standortproblem)**

$$k = 1; \min\{5,6\}; y_{1,1} \leftarrow 1; x_1 \leftarrow 1$$

$$k = 2; \min\{8,6\}; y_{2,2} \leftarrow 1; x_2 \leftarrow 1$$

$$k = 3; \min\{9,8\}; y_{2,3} \leftarrow 1; x_2 \leftarrow 1$$

$$k = 4; \min\{5,6\}; y_{1,4} \leftarrow 1; x_1 \leftarrow 1$$

Fitness: $5+6+8+5+4+3=32$

Aufgabe 6.2 (Crossover)

[110 | 00110]

[011 | 10101]

Aufgabe 6.3 (Mutation)

Da bei großen Änderungen die Wahrscheinlichkeit, eine Verbesserung zu erzielen, gering ist.

Aufgabe 6.4 (Individuen)

Jedes Individuum besteht aus n Bits. Ein Bit i gibt an, ob der Gegenstand i bei der Dekodierung gewählt werden darf oder nicht. In der Dekodierung wird solange eines der gewählten Elemente eines Individuums entfernt, bis die verbleibenden Elemente die Gewichtsrestriktion einhalten.

Aufgabe 6.8 (Dekodierung Losgrößenproblem)

a)

111

100

wird zu folgenden Losen dekodiert:

10 20 30

60 0 0

Rüstkosten für Erzeugnis 1: 150

Rüstkosten für Erzeugnis 2: 20

Lagerkosten für Erzeugnis 1: 0

Lagerkosten für Erzeugnis 2: 160

Gesamtkosten und damit Fitness: 330

b)

Rüsten:

111

100

Lager:

10 10 0

40 20 0

Bedarf:

10 20 30

20 20 20

Gesamtkosten: 290

c)

Dekodierung ist nicht surjektiv. Der in b) beschriebene Plan kann nicht durch Dekodierung berechnet werden.

Aufgabe 6.10 (Clusterung)

Individuum bzw. Bit-Matrix:

100100

011000

000011

Fitness: 12,243

Kapitel 7, Abschnitt 7.7, S. 209f:

Aufgabe 7.1

$$y_1 = -1,55$$

$$y_2 = 0$$

Aufgabe 7.2

a)

$$z = 0,13$$

b)

$$I = \begin{pmatrix} 0,22 \\ -0,12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

Da sonst nicht genug Individuen zur Auswahl der nachfolgenden Population vorhanden sind.

Aufgabe 7.4

Erratum: Es muss heißen: Die Schrittweite ist $I.\sigma = 0,1$.

$$\alpha = 0,7$$

$$I.\sigma = 0,0571$$

$$I.v = \begin{pmatrix} 0,33997 \\ -0,15432 \end{pmatrix}$$

Kapitel 8, Abschnitt 8.8, S. 264ff:**Aufgabe 8.1 (Koordinationsprobleme)**

Private Informationen

Autonomie

Zielkonflikte

Aufgabe 8.2 (Koordinationsprobleme)

Das Erreichen der Koordinationsziele kann aufgrund der privaten bzw. verteilten Informationen nicht bei der Optimierung gemessen werden (wie die „Suche im Nebel“).

Aufgabe 8.3 (Koordinationsziele)

Pareto-Effizienz, soziale Effizienz, Fairness

Aufgabe 8.5 (Koordinationsmechanismen)

Fair und hohe Lösungsqualität, effizient

Aufgabe 8.6 (Ausgleichszahlungen)

Nutzenausgleich möglich, monetäre Zielfunktionen

Aufgabe 8.7 (Automatisierte Verhandlungen)

Gemeinsamkeiten: Heuristische Suche

Unterschiede: Mehrere Entscheidungsträger

Aufgabe 8.8 (Koordinationsziele)

Pareto-Front:

$$\begin{aligned}(z^A(l_1), z^B(l_1)) &= (30, 200) \\ (z^A(l_2), z^B(l_2)) &= (170, 100) \\ (z^A(l_4), z^B(l_4)) &= (60, 180) \\ (z^A(l_5), z^B(l_5)) &= (80, 170) \\ (z^A(l_7), z^B(l_7)) &= (130, 150) \\ (z^A(l_9), z^B(l_9)) &= (50, 190) \\ (z^A(l_{10}), z^B(l_{10})) &= (100, 160)\end{aligned}$$

Sozial-effiziente Lösung:

$$(z^A(l_1), z^B(l_1)) = (30, 200)$$

Aufgabe 8.9 (Dezentrales Reihenfolgeproblem)

10!

Aufgabe 8.10 (Dezentrales Reihenfolgeproblem)

123, 132, 213, 231, 312, 321

Aufgabe 8.11 (Dezentrales Reihenfolgeproblem)

Rüstkosten:

0 7 8 6 2

2 0 4 1 9

3 3 0 6 7

4 8 1 0 4

5 2 2 1 0

Bearbeitungszeiten auf drei Maschinen:

1 6 2

2 7 3

3 8 4

4 9 5

5 1 6

Aufgabe 8.12 (Dezentrales Reihenfolgeproblem)

Rüstkosten: 10

Makespan: 12

Es können alle Jobs unmittelbar nacheinander an der ersten Maschine gestartet werden, ohne dass an späteren Maschinen Wartezeiten entstehen.

Aufgabe 8.13 (Mediator)

Steuerung und Kontrolle der Verhandlung

Lösungsvorschläge generieren

Neutralität

Mediator kennt die Zielfunktionswerte der Agenten nicht!

Aufgabe 8.14 (Lokaler Verhandlungsmechanismus)

A wählt:

$$(z^A(l_1), z^B(l_1)) = (30, 200)$$

$$(z^A(l_4), z^B(l_4)) = (60, 180)$$

$$(z^A(l_9), z^B(l_9)) = (50, 190)$$

B wählt:

$$(z^A(l_4), z^B(l_4)) = (60, 180)$$

Aufgabe 8.15 (Lokaler Verhandlungsmechanismus)

A: Nein

B: Ja

Aufgabe 8.16 (Dezentrales Losgrößenproblem)

Rüstkosten A: 32

Lagerkosten A: 42

Gesamtkosten A: 74

Rüstkosten B: 11

Lagerkosten B: 90

Gesamtkosten B: 101

Aufgabe 8.17 (Genetischer Verhandlungsmechanismus – Phase P-I)

In beiden Szenarien könnten sich beide Agenten bei Akzeptanz der Kinder im Durchschnitt verbessern.

Aufgabe 8.18 (Genetischer Verhandlungsmechanismus – Phase P-II)

B zahlt an A 13,75 .

	A					B		
240	40	-25		12,5		200	37,5	
240	60	-5		12,5		180	17,5	
210	70	5	-13,75	-17,5	13,75	140	-22,5	
220	90	25		-7,5		130	-32,5	
	65	0				162,5	0	
			A bekommt von B 13,75					

Aufgabe 8.20 (Genetischer Verhandlungsmechanismus für dezentrales Reihenfolgeproblem)

Phase P-I: Tausch zweier benachbarter Jobs

Phase P-II: Durch Punkte für Lösungen wird eine gemeinsame Lösung ausgewählt.

Kapitel 9, Abschnitt 9.4, S. 282f:

Aufgabe 9.1

$$AB = \{2\}; AU = \{3,5\}; AN = \{\}$$

Aufgabe 9.2

$$s_1(t+1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.3

$$a_1(t) = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -5/8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.4

$$b_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.5

$$c_1(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.6

$$v_1(t+1) = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,72 \end{pmatrix}$$

Kapitel 10, Abschnitt 10.8, S. 301ff:**Aufgabe 10.1 (Knotenauswahl)**

$$P_{3,1}^k(t) = 0,38$$

$$P_{3,4}^k(t) = 0,62$$

Aufgabe 10.2 (Knotenauswahl)

Ort 2 wird häufig, dagegen Ort 3 selten gewählt.

Aufgabe 10.3 (Aktualisierung der Pheromone)

0,1	0,45	0,83	0,1
0,18	0,1	0,855	0,83
0,45	0,92	0,1	0,81
1,0	0,81	0,18	0,1

Aufgabe 10.4 (Verdunstung)

Nach 45 Iterationen.

Kapitel 11, Abschnitt 11.9, S. 344f:**Aufgabe 11.1**

$$x_2 = -\frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2}$$

Aufgabe 11.3

Er ist ein positives Beispiel ($\text{sign}(0,5)$).

Aufgabe 11.4

$$w^* = (0,69; 0,66)^T; b^* = -5$$

$$\text{sign}(-0,665) = -1$$

Aufgabe 11.5

$$K = 0,0015$$